V.A. USPENSKY

TRIÁNGULO DE PASCAL

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

V. A. USPENSKI

TRIÁNGULO DE PASCAL

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

ÍNDICE

PREFACIO

Es imprescindible advertir al lector que no se ha enterado todavía de qué es el triángulo de Pascal, que no se trata de una figura geométrica con tres ángulos y tres lados. Se llama triángulo de Pascal a una importante tabla numérica por medio de la cual se logra resolver toda una serie de problemas de cálculo. Considerando algunos de ellos, se referirá paso al problema concerniente al significado general de las palabras "resolver el problema".

La exposición no presupone conocimientos previos cualesquiera que salgan fuera de los límites del programa previsto por la escuela de ocho grados, excepto la definición y designación de la potencia de exponente nulo. Se debe conocer exactamente que todo número distinto de cero, elevado a la potencia cero, se considera (por definición) igual a una unidad: $a^0 = 1$ cuando $a \neq 0$.

§ 1.
PROBLEMA
DE LA VIII OLIMPIADA

En la VIII olimpiada matemática de Moscú (1945), a sus participantes, alumnos de los 9–10 grados, fue propuesto el siguiente problema [1]:

Se tiene una red de caminos (fig. 1). Desde el punto A parten 2^{1000} hombres. Una mitad de ellos se encaminan en la dirección l, otra, en la m. Al llegar al primer cruce cada grupo se divide: una mitad sigue la dirección l, la otra, la m. Lo mismo ocurre en cada cruce. ¿ Cuántos hombres llegarán a todos los cruces de la milésima serie? [2]

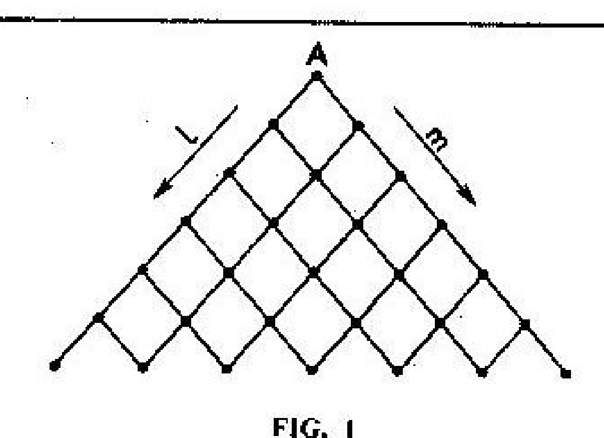


FIG. 1

Anunciemos, ante todo, que todavía no conocemos si es resoluble el problema, es decir, si pueden moverse los hombres como lo require la condición del problema. En efecto, si a un cruce cualquiera, en que va a dividirse por mitad la afluencia de gente, llega un número impar de hombres, el movimiento se

[1] Véase *А. М. Яглом* и *И. М. Яглом*, «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», М., Гостехиздат, 1954, стр. 10; «Номера задач, предлагавшихся на Московских математических олимпиадах», задача 60б. *Yaglom A. M. y Yaglom I. M.* Problemas no elementales en la exposición elemental. M. Gostejizdat, 1954, pág. 10, "Números de los problemas propuestos en las olimpiadas matemáticas de Moscú", problema 60b, en ruso).

[2] Se tiene en cuenta que las filas de los cruces están numeradas, partiendo de cero, ya que en la última hay un cruce (A), en la primera, dos, en la segunda, tres, etc.

detendrá. Por consiguiente, para que el problema tenga solución, es necesario y suficiente que a cada cruce de cualquiera de las primeras mil series (filas), de 0 hasta 999, llegue un número par de hombres. De que esto es así, nos cercioraremos resolviendo el problema.

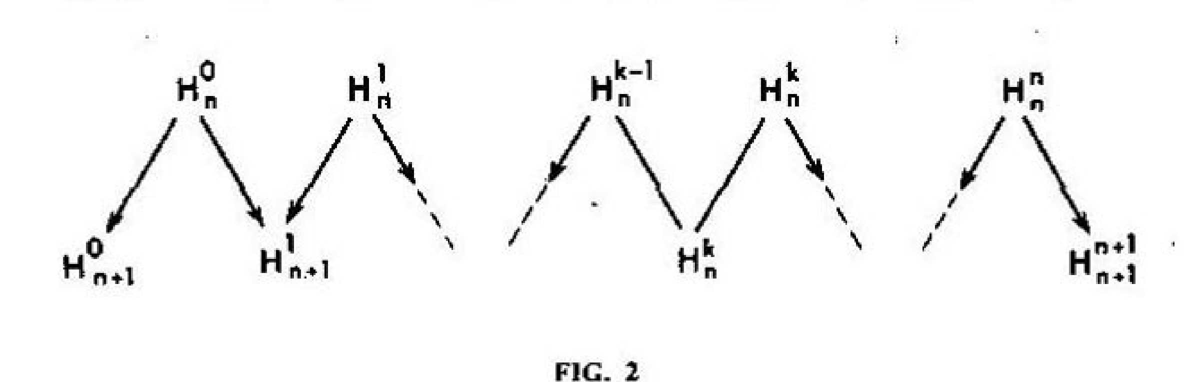


FIG. 2

Al principio introduciremos las designaciones para las cantidades de hombres que dejaron atrás cada cruce de nuestra red de caminos. Numeremos los cruces de cada fila, de izquierda a derecha, partiendo de cero; por lo tanto, los cruces de la n-ésima fila se numerarán de cero hasta n. Denotaremos por H_n^k el número de hombres que pasaron por el k-ésimo cruce de la n-ésima fila. Puesto que no se sabe todavía si es resoluble el problema, no podemos estar seguros de que existan *todos* los números H_n^k, es decir, que exista cada uno de los números H_n^k con todo n de 0 hasta 1000 y todo k de 0 hasta n. Es indudable que algunos de ellos existen. De modo que, en virtud de las designaciones introducidas,

$$H_0^0 = 2^{1000}. \quad (1.1)$$

Veamos ahora cómo se vinculan entre sí los números $H_n^k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ y $H_{n+1}^k (k = 0, 1, 2, \ldots, n+1)$

a condición de que existan todos. Más tarde veremos que si existen y son pares todos los números H_n^k, existen también todos los números H_{n+1}^k. Consideremos las filas n y $(n+1)$ de los cruces y los tramos de los caminos que los unen; pongamos frente a cada cruce la designación del número respectivo de hombres (véase la fig. 2). El número de hombres que salieron del cruce 0

de la fila n (es decir, H_n^0) se dividirá en dos partes iguales y una mitad llegará al cruce 0 de la fila $(n+1)$; por eso,

$$H_{n+1}^0 = \frac{H_n^0}{2}. \tag{1.2}$$

Otra mitad de H_n^0 se aproximará al primer cruce de la fila $(n+1)$ y se reunirá allá con la mitad de hombres que han abandonado el primer cruce de la fila n, o sea, con la mitad H_n^1.

De ahí $H_{n+1}^1 = \dfrac{H_n^0 + H_n^1}{2}$. En general, el número de hombres que lleragon al cruce k de la fila $(n+1)$ era la suma de mitad de hombres que partieron del cruce $(k-1)$ de la fila n (esta mitad era igual a $\dfrac{H_n^{k-1}}{2}$) con la de hombres que partieron del cruce k de la fila n (esta mitad era igual a $\dfrac{H_n^k}{2}$). Por lo tanto,

$$H_{n+1}^k = \frac{H_n^{k-1} + H_n^k}{2} \text{ con } 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.3}$$

Por fin, el número de hombres que alcanzaron el cruce $(n+1)$ de la fila $(n+1)$ es equivalente a la mitad de hombres que salieron del cruce n de la fila n:

$$H_{n+1}^{n+1} = \frac{H_n^n}{2}. \tag{1.4}$$

Las relaciones (1.1) – (1.4) permiten establecer que el problema admite realmente su solución. En efecto, de las igualdades (1.2) – (1.4) se deduce que si con cierto n fijo todos los números de la fila n: $H_n^0, H_n^1, \ldots, H_n^n$ existen y son divisibles por $2a$, todos los números de la fila $(n+1)$: $H_{n+1}^0, H_{n+1}^1, \ldots, H_{n+1}^{n+1}$ también existen y son divisibles por a. Por consiguiente, puesto que todos los números de la fila 0 (su total es un solo H_0^0 existen y son divisibles por 2^{1000} (en virtud de (1.1), todos los números de la primera fila

$$H_1^0,\ H_1^1$$

existen y son divisibles por 2^{999}; todos los números de la segunda fila

$$H_2^0,\ H_2^1,\ H_2^2$$

existen y son divisibles por 2^{998}; todos los números de la 999-ésima fila

$$H_{999}^0,\ H_{999}^1,\ \ldots,\ H_{999}^{999}$$

existen y son divisibles por 2; todos los números de la 1000-ésima fila

$$H_{1000}^0,\ H_{1000}^1,\ \ldots,\ H_{1000}^{1000}$$

existen (y son divisibles por 1).

Las relaciones (1.2) – (1.4) no sólo demuestran que existe la solución del problema, sino que señalan cómo de una línea de números

$$H_n^0,\ H_n^1,\ \ldots,\ H_n^n$$

se obtiene la otra

$$H_{n+1}^0,\ H_{n+1}^1,\ \ldots,\ H_{n+1}^{n+1}.$$

Empleando sucesivamente estas relaciones, a partir de la línea cero [es decir, aprovechando la relación (1.1)] podemos calcular, en principio, los valores de H_n^k para todos los 501501 cruces, que se contienen en las filas hasta el milésimo inclusive, en particular, para todos los cruces de la milésima fila, resolviendo, por lo tanto, el problema. De manera que para las primeras filas por cálculo directo resulta:

$$H_1^0 = \frac{H_0^0}{2} = \frac{2^{1000}}{2} = 2^{999};\quad H_1^1 = \frac{H_0^0}{2} = \frac{2^{1000}}{2} = 2^{999};$$

$$H_2^0 = \frac{H_1^0}{2} = \frac{2^{999}}{2} = 2^{998};\quad H_2^1 = \frac{H_1^0 + H_1^1}{2} = \frac{2^{999} + 2^{999}}{2} = 2^{999};$$

$$H_2^2 = \frac{H_1^1}{2} = \frac{2^{999}}{2} = 2^{998};\quad H_3^0 = \frac{H_2^0}{2} = \frac{2^{998}}{2} = 2^{997};$$

$$H_3^1 = \frac{H_2^0 + H_2^1}{2} = \frac{2^{998} + 2^{999}}{2} = 3 \cdot 2^{997}, \text{ etc.}$$

§ 2. ¿QUÉ SIGNIFICA RESOLVER EL PROBLEMA?

Por consiguiente, el problema del § 1 está resuelto...

"¿Resuelto?, se sorprenderá un lector inexperto (ya que el experimentado sabe de antemano lo que va a decir el autor y no se sorprenderá por nada). No he notado que lo hayamos resuelto".

Autor. Está claro que lo hemos resuelto. Es que resolver el problema es hallar su solución. Ya lo hemos hecho.

Lector (*perturbado*). ¿Acaso es ésta la solución?

Autor (*fingiéndose que no entiende en qué consiste el asunto*) ¿Y qué, es errónea la solución?

Lector. No, es cierta, pero, en general, no es la solución.

Autor. Pues, ¿ qué significa la solución?

Lector. Una línea de números que señalen cuántos hombres llegarán a los cruces de la milésima fila.

Autor. Pero, esta línea ha de contener 1001 números. ¿Acaso los organizadores de la VIII olimpíada tenían esperanza en que alguien les escribiera el número 1001?

Lector (*queda pensativo*).

Autor. Tengo una proposición. No compliquemos la situación con líneas largas; escojamos uno de los cruces y tratemos de llegar a conocer cuántos hombres lo hayan visitado. ¿De acuerdo?

Lector (*se pone de acuerdo*).

Autor. Empecemos pues; ¿qué cosa podríamos tener por solución del siguiente problema: cuántos hombres llegarán al tercer cruce de la cuarta fila?

Lector. ¡Cómo qué cosa! Un número.

Autor. ¿Escrito en qué forma?

Lector (*con asombro*). Que sea en el sistema decimal.

Autor. ¿Y la respuesta "H_4^3" no será la solución?

Lector. Claro que no. ¡No tiene que ver con la solución!

Autor. Al continuar la cadena de cálculos, que ha sido iniciada al final del párrafo anterior, es fácil cerciorarse de que al tercer cruce de la cuarta fila llegarán 2^{998} hombres. ¿Será la solución del problema la respuesta "2^{998}"?

Lector (*sin esperar chasco*). Sí, naturalmente.

A u t o r. Pero, la expresión "2^{998}" no es la representación del número en el sistema decimal. Ella se compone de *dos* representaciones decimales de los números, o sea, "2" y "998" cuya disposición relativa señala qué operación habrá de efectuarse con estos números a fin de obtener un valor requerido.

L e c t o r. Pero, la expresión "2^{998}" es fácil convertirla en la representación decimal.

A u t o r (*con tono ejemplar*). No tanto. Pruébese elevar 2 a la potencia 998. Pero, se trata de otra cosa. El problema es que Ud. contradice ahora a sus afirmaciones anteriores. Se conformaba con tener por solución tan sólo un número escrito en el sistema decimal. Desde el punto de vista de esta definición, la expresión "2^{998}" no es todavía la solución (es, diríamos, un "producto en bruto" de que ha de obtenerse la solución). Por supuesto, tal punto de vista es posible si se lleva a cabo de una manera sucesiva. Pero, es posible que haya también otro punto de vista conforme al cual 2^{998} ês la solución. Parece que le gustaría más este punto de vista porque muy a menudo las soluciones de unos u otros problemas matemáticos no se dan directamente en forma de los números escritos en el sistema decimal, sino en la "indirecta" análoga. Pero, ¿cómo se entenderá el término "solución" en este caso, es decir, para el problema sobre el tercer cruce de la cuarta fila?

L e c t o r. En este caso, es imprescindible tener por solución toda expresión (no se trata del número) que designe cierto número para el cual haya un procedimiento que permita pasar de ella a la representación decimal del número respectivo. 2^{998} será, precisamente, la expresión de este tipo. El procedimiento de paso a la representación decimal (997 multiplicaciones sucesivas) a pesar de ser largo, se realiza en principio.

A u t o r. ¿Por qué, entonces, H_4^3 no es la solución? Aquí también hay procedimiento de paso a la representación decimal que se da por las relaciones (1.1) – (1.4).

L e c t o r (*desconcertado*).

A u t o r (*contento que ha podido poner al lector en un atolladero, — al inexperto, naturalmente, ya que el experimentado podrá poner en el atolladero al mismo autor*). El problema es que son posibles, por lo menos, tres interpretaciones de lo que significa resolver el problema sobre el número de hombres que llegaron a un cruce dado.

PRIMERA INTERPRETACIÓN. Se tiene por solución el número escrito en el sistema de numeración decimal.

SEGUNDA INTERPRETACIÓN. Se tiene por solución tal expresión designadora del número para la cual se conoce el procedimiento que permite pasar de ella a la representación decimal del número designado por la última (o sea, a la solución en la primera interpretación).

TERCERA INTERPRETACIÓN. Se tiene por solución tal expresión designadora del número que se compone por los números (escritos en el sistema decimal) y ciertas operaciones "universalmente admitidas" (por ejemplo, las aritméticas) [1]. Exijamos que cada operación "universalmente admitida" se acompañe del procedimiento que permita pasar de las representaciones decimales de los números, a los cuales se aplica la operación, a la representación decimal del resultado (tales son, precisamente, las operaciones aritméticas). Entonces, para toda la expresión en total, habrá un procedimiento que permita pasar de las representaciones decimales de los números que en ella participan, a la representación decimal del número que esta expresión designa; por lo tanto, la solución de la tercera interpretación se convertirá automáticamente en la de la segunda.

Con la *primera* interpretación ni H_4^3, ni 2^{998} constituirán la solución del problema sobre el tercer cruce de la cuarta fila. Para obtener la solución es imprescindible hallar para 2^{998} una representación decimal que, sin embargo, ha de contener más de 300 signos; el autor desconoce si ésta ha sido hecha algún día [2].

Con la *segunda* interpretación tanto H_4^3, como 2^{998} serán las soluciones.

En lo que se refiere a la *tercera* interpretación es un caso en que todo dependerá de la elección de las operaciones de partida "universalmente admitidas": si éstas incluyen la potenciación, entonces 2^{998} será la solución, si no, no. Igualmente, si se incluye en el número de las operaciones "universalmente admitidas"

---

[1] El conjunto de las operaciones "universalmente admitidas" ha de señalarse de antemano. Vale subrayar que la tercera interpretación depende de cómo se ha elegido este conjunto. De manera que la expresión 2^{998} será la solución en caso de la tercera interpretación si el número de las operaciones "universalmente admitidas" incluye la potenciación.

[2] En la pág. 27 de la obra de B. Литцман «Великаны и карлики в мире чисел», M., Физматгиз, 1959 (Litzman V., "Gigantes y pigmeos en el mundo de los números", M., Fizmatguiz, 1959, en ruso) como potencia máxima de las calculadas para el número 2 se ofrece la representación decimal de 2^{400}.

la operación "hache" que calcula por n y k el número H_n^k (el procedimiento de tal cálculo se da por las relaciones (1.1) – (1.4) ya que el requisito que se impone a las operaciones "universalmente admitidas" ha sido cumplido en este caso), entonces H_4^3 será la solución del problema: en caso contrario, no.

Surge una pregunta: ¿si se puede escoger arbitrariamente las operaciones "universalmente admitidas"? Formalmente dicho, sí. Por el contrario, en calidad de operaciones "universalmente admitidas", por medio de las cuales se expresa la solución de cualquier problema, es imprescindible escoger tales operaciones que se utilicen en la resolución de muchos problemas, o por lo menos, de problemas importantes. Precisamente tales son las cuatro operaciones aritméticas y algunas otras, por ejemplo, la operación de potenciación y la de cálculo de la factorial (véase la última a continuación, en el § 6). Si la operación "hache" fuera necesaria para resolver diversos problemas o si nuestro problema sobre los cruces fuese muy importante, tal vez la operación "hache" se referiría a la categoría de las "universalmente admitidas". Sin embargo, la operación "hache" todavía no lo ha merecido y se duda de que lo merezca. En el § 4 consideraremos una operación semejante a la "hache" que, a nuestro parecer, merece ser incluida en el número de las operaciones "universalmente admitidas".

Y ahora volvamos a nuestro problema inicial sobre los cruces de la milésima serie. Su solución se puede hallar en tres diversas formas correspondientes a tres interpretaciones de la palabra "solución" que se exponen más arriba:

1) en forma de una línea compuesta por 1001 números escritos en el sistema decimal; no tratemos de hallar solución en esta forma (no vale la pena, ya que para uno cruce de la cuarta fila no hemos hallar la semejante solución);

2) en forma de una expresión que permita calcular en principio para cada cruce de la milésima serie (fila) el número (es decir, hallar su representación decimal) de los hombres que llegaron al cruce; tal solución la hemos hallado ya: H_{1000}^k; con la particularidad de que el proceso del cálculo se da por las igualdades (1.1) – (1.4);

3) en forma de una expresión que no sólo permita calcular H_{1000}^k para todo k de 0 hasta 1000, sino que se forme por medio de ciertas operaciones "universalmente admitidas"; hallemos la solución en esta forma; con ello, la exposición sucesiva aclarará cuáles operaciones se puede considerar como "universalmente admitidas".

§ 3.
TRIÁNGULO DE PASCAL

Consideraremos una de las líneas de números $d_0, d_1, \ldots, d_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (cuando $n = 0$ esta línea "se degenera" en la compuesta por un solo número d_0). Formemos de ella una línea nueva de números $s_0, s_1, \ldots, s_{n+1}$, según la siguiente regla:

$$s_0 = d_0, \tag{3.1}$$

$$s_k = d_{k+1} + d_k \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{3.2}$$

$$s_{n+1} = d_n. \tag{3.3}$$

Diremos, que esta línea nueva ha sido obtenida de la anterior *según la ley de Pascal*[1]. Conforme a esta ley de la línea 2, 0, -2 se obtiene la 2, 2, -2, -2, y, a su vez, de la última, la 2, 4, 0, -4, -2.

OBSERVACIÓN 1. Si la línea β se ha obtenido de la α de acuerdo con la ley de Pascal, la suma de los términos de la primera es equivalente a la suma doblada de los términos de la segunda. En efecto, si se cumplen las relaciones (3.1) – (3.3), entonces

$$s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n + s_{n+1} = d_0 + (d_0 + d_1) + (d_1 + d_2) + \\ + \ldots + (d_{n-1} + d_n) + d_n = 2(d_0 + d_1 + \ldots + d_n) \tag{3.4}$$

OBSERVACIÓN 2. Llamemos *simétrica* a la línea de números $d_0, \ldots, d_n$ si con todo k entero de 0 hasta n tiene lugar la igualdad

$$d_k = d_{n-k}. \tag{3.5}$$

La línea de números $s_0, \ldots, s_{n+1}$ que se obtiene según la ley de Pascal de la línea simétrica $d_0, \ldots, d_n$ es también simétrica.

---

[1] Blaise Pascal (1623 – 1662) es un gran científico de Francia. Investigó, en particular, las propiedades de la tabla numérica triangular, cada línea de la cual se obtiene de la anterior según la ley que se da por las relaciones (3.1) – (3.3). Esta tabla que será considerada a continuación, adquirió una denominación universalmente admitida como "triangulo de Pascal". Por eso la ley que constituye la base de su formación se llamará la *ley de Pascal* y sus líneas, las *líneas de Pascal*.

Para afirmarlo es preciso comprobar la igualdad

$$s_k = s_{(n+1)-k} \quad (3.6)$$

con $k = 0, 1, ..., n + 1$. Pero para $k = 0$ y $k = n + 1$ la igualdad (3.6) se deduce de las relaciones (3.1)−(3.3) y de la igualdad $d_0 = d_n$ (que se obtiene de (3.5) siendo $k = 0$). Pero, si $1 \leqslant k \leqslant n$, resulta que

$$s_k = d_{k-1} + d_k = d_{n-(k-1)} + d_{n-k} = d_{n+1-k} + d_{[(n+1)-k]-1} = \\ = d_{[(n+1)-k]-1} + d_{(n+1)-k} = s_{(n+1)-k}. \quad (3.7)$$

Consideraremos ahora la línea compuesta por un número, o sea, una unidad. Llamemos a esta línea *línea cero de Pascal*. Según la ley de Pascal, de ella constituyamos una línea nueva que llamaremos la *primera línea de Pascal*. De ésta formemos, de acuerdo con la ley de Pascal, la segunda línea de Pascal, etc. Puesto que al pasar a cada línea sucesiva el número de términos de la última crece en una unidad, en la n-ésima línea de Pascal habrá número $n + 1$. Sin efectuar cálculos, tomando tan sólo en consideración las observaciones 1 y 2, se puede afirmar que

1) la suma de los números de la n-ésima línea de Pascal es equivalente a 2^n (ya que al pasar de una línea a la siguiente la suma de los términos se dobla y para la línea cero ella es equivalente a $2^0 = 1$);

2) todas las líneas de Pascal serán simétricas (ya que la propiedad de simetría se conserva al pasar de cada línea a la siguiente, siendo simétrica la línea cero).

Escribamos las líneas de Pascal, partiendo de la de cero, una debajo de la otra, de modo que cada número de cada línea resulte puesto entre los números de la línea anterior la suma de los cuales es este número. Obtendremos una tabla infinita que se llama *triángulo aritmético de Pascal*, o sencillamente, *triángulo aritmético* o *el de Pascal*. Toda la tabla en total parece rellenar la parte interior de cierto ángulo; todo su principio, formado por las líneas 0, 1, ..., n, tiene la forma del triángulo. En la pág. 17 se representa el principio del triángulo de Pascal formado por sus primeras 15 líneas, desde 0 hasta 14.

El triángulo de Pascal es simétrico con respecto a su bisectriz. Los números que lo rellenan tienen una serie de propiedades interesantes (por ejemplo, la suma de los cuadrados de los términos de su línea cualquiera siempre es igual al número del

														1														
													1		1													
												1		2		1												
											1		3		3		1											
										1		4		6		4		1										
									1		5		10		10		5		1									
								1		6		15		20		15		6		1								
							1		7		21		35		35		21		7		1							
						1		8		28		56		70		56		28		8		1						
					1		9		36		84		126		126		84		36		9		1					
				1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1				
			1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1			
		1		12		66		220		495		792		924		792		495		220		66		12		1		
	1		13		78		286		715		1287		1716		1716		1287		715		286		78		13		1	
1		14		91		364		1001		2002		3003		3432		3003		2002		1001		364		91		14		1

mismo triángulo; para todo número simple p todos los términos de la p-ésima línea, menos los dos extremos, son divisibles por p) [1].

Está claro que el procedimiento de formación del triángulo de Pascal se lo podría dar sin recurrir a las nociones "ley de Pascal" o "línea de Pascal": el triángulo de Pascal es sencillamente una tabla numérica infinita de "forma triangular" en cuyos lados se encuentran las unidades y todo número, menos estas unidades laterales, se obtiene como suma de dos números que están encima de él, por su izquierda y derecha. En tal forma el triángulo de Pascal apareció en el "Tratado sobre el triángulo aritmético" del mismo autor, obra que se editó en 1665 después del fallecimiento de su creador. Más detalladamente, en dicho tratado fue publicada la siguiente tabla [2] en que cada número A es igual a la suma del número anterior puesto en la fila horizontal en que se encuentra A y del número anterior puesto en la fila vertical en que se encuentra también A:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Por lo tanto, nuestro "triángulo de Pascal" difiere del "triángulo" que consideró el mismo Pascal con giro a 45°.

Pascal investigó detalladamente las propiedades y aplicaciones de su "triángulo"; algunas de estas aplicaciones se considerarán en el siguiente

[1] Algunas de estas propiedades se consideran en las págs. 89—93 y 103—106 de la obra de *Е. Б. Дынкин* и *В. А. Успенский* «Математические беседы», М.—Л., Гостехиздат, 1952 (*Dinkin E. B.* y *Uspenski V. A.* "Pláticas matemáticas", Moscú — Leningrado, Gostejizdat, 1952, en ruso).

[2] Véase *B. Pascal*. Oeuvres complètes, t. III. Paris, Hachette et Cie, 1908, pág. 244.

párrafo. Ahora, vamos a ofrecer como ejemplo, tan sólo tres propiedades del "triángulo" que halló el mismo Pascal; en este caso (sólo en este lugar de nuestra exposición) partiremos de aquella disposición del "triángulo" en el plano que indicó Pascal y hablaremos de *filas horizontales y verticales.*

Propiedad 1. En la tabla cada número A es igual a la suma de los números de la fila horizontal anterior, partiendo de la más izquierda hasta la dispuesta directamente por encima del número A (véase la fig. 3 en que las casillas que contienen los sumandos y que dan en suma A, están rayadas).

Propiedad 2. En la tabla cada número A es igual a la suma de los números de la fila vertical anterior, partiendo de la superior hasta la dispuesta directamente por la izquierda del número A (fig. 4).

Propiedad 3. Cada número A de la tabla siendo disminuido en una unidad, es igual a la suma de todos los números que rellenan el rectángulo limitado por aquellas filas verticales y horizontales en cuya intersección se encuentra el número A (las propias filas no se incluyen en el rectángulo que se considera) (fig. 5).

Se deja a cargo del lector la demostración de estas propiedades (*sugerencia:* la tercera propiedad se deduce fácilmente de las primeras dos).

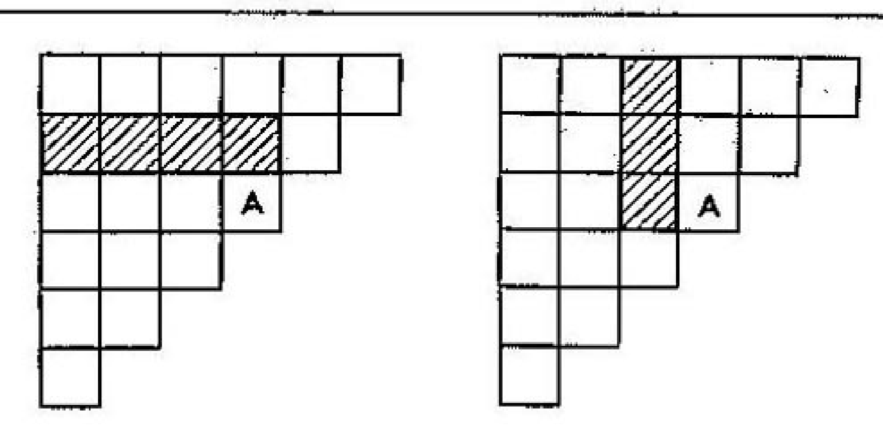


FIG. 3 FIG. 4

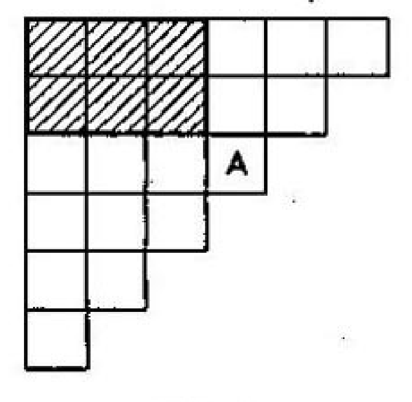


FIG. 5

Sin embargo, cien años antes de que naciera el tratado de Pascal, la tabla que es de interés para nosotros, sólo no en la forma "triangular", sino en la "rectangular", fue publicada en el "Tratado general sobre el número y la medida" (1556–1560) que también vio la luz en parte después de la muerte de su autor, el distinguido matemático italiano Nicolás Tartaglia. Su tabla tenía la siguiente forma [1]:

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

En ella la fila superior se compone por unidades; en cada una de las filas restantes el número más izquierdo es una unidad y el que la sigue se forma sumando dos números que le preceden y están por encima. Es natural que la tabla propuesta por Tartaglia se llame "rectángulo de Tartaglia".

Los términos de cada línea de Pascal suelen numerarse de izquierda a derecha partiendo de cero. Así, el cuarto lugar en la quinta línea está ocupado por el número 10. El número que se dispone en el k-ésimo lugar, en la n-ésima línea, se denotará por T_n^k de modo que, por ejemplo, $T_0^0 = 1$, $T_5^4 = 10$, $T_{14}^4 = 1001$. Es evidente, que la expresión T_n^k ha sido definida con todo $n \geqslant 0$ y $k = 0, 1, ..., n$.

Consideraremos una sucesión infinita formada por los números T_n^k con un k fijo y n variable, es decir, la sucesión

$$T_k^k, T_{k+1}^k, T_{k+2}^k, ..., T_n^k, ... \qquad (3.8)$$

Los términos de esta sucesión son los números que figuran en el triángulo de Pascal "por la izquierda, en la k-ésima línea paralela al lado izquierdo", así como, en virtud de la simetría del triángulo, los números que figuran "por la derecha, en la k-ésima línea paralela al lado derecho". En el rectángulo de Tartaglia estos números rellenan la k-ésima columna y la k-ésima línea.

[1] Véase *Zeuthen, H. G.*, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen von H. G. Zeuthen. Kopenhagen, Höst, 1896.

Cuando $k = 0$ se obtendrá la sucesión

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots,$$

compuesta exclusivamente por unidades (línea cero o columna cero en el rectángulo de Tartaglia).

Cuando $k = 1$ tenemos una serie natural

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

(primera línea o primera columna del rectángulo de Tartaglia).

Cuando $k = 2$ se obtendrá la sucesión

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$$

(segunda línea o segunda columna del rectángulo de Tartaglia). Los términos de esta sucesión se llaman *números triangulares*: 1 es el primer número triangular; 3, el segundo; 6, el tercero, etc.; el m-ésimo número triangular es igual a T^2_{m+1}. Se llaman números por indicar el número de bolas u otros objetos iguales colocados en forma de un triángulo (véase la fig. 6); el m-ésimo número triangular, en particular,

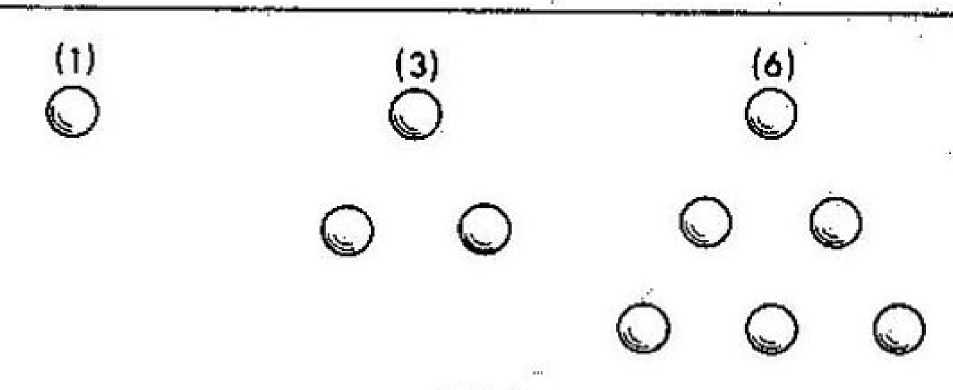


FIG. 6

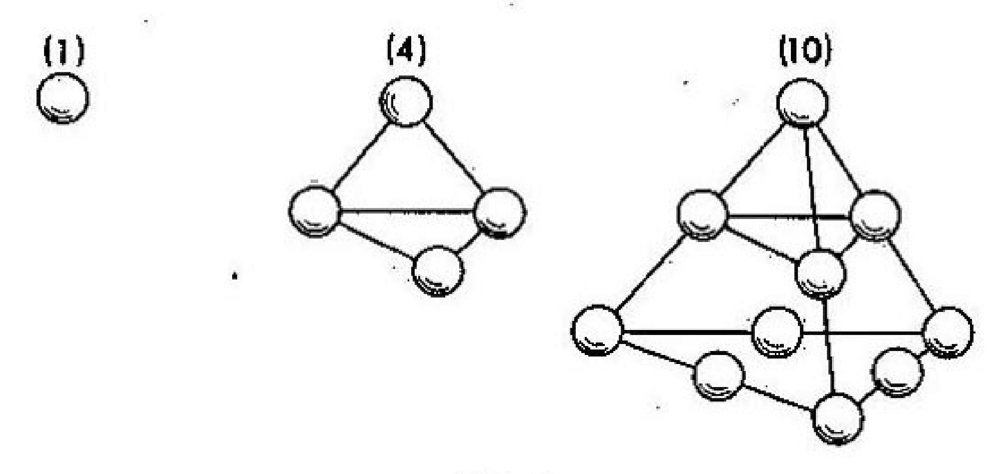


FIG. 7

señala cuántos términos del triángulo de Pascal se contienen en sus primeras m líneas, de cero hasta la $(m-1)$-ésima.

Suponiendo $k = 3$ obtendremos la sucesión

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots$$

(tercera línea o tercera columna del rectángulo de Tartaglia). Los términos de esta sucesión se llaman *números piramidales* o más exactamente, *los tetraédricos*: 1 es el primer número tetraédrico; 4, el segundo; 10, el tercero, etc.; es que el m-ésimo número tetraédrico es igual a T^3_{m+2}. Estos números señalan cuántas bolas pueden colocarse en forma de una pirámide triangular (tetraedro) (fig. 7) [1].

§ 4. OPERACIÓN DE PASCAL

En virtud de su definición los números T^k_n se someten a las siguientes relaciones:

$$T^0_0 = 1, \qquad (4.1)$$

$$T^0_{n+1} = T^{n+1}_{n+1} = 1 \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (4.2)$$

$$T^k_{n+1} = T^{k-1}_n + T^k_n \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.3)$$

[1] Los números triangulares y piramidales (que son casos particulares de los así llamados números figuras) despertaron interés ya en Grecia Antigua, donde se les atribuían las propiedades místicas. Uno de los primeros tratados que nos han llegado y en que se consideran estos números es, por lo visto, la "Introducción a la aritmética" de Nicómaco (gr. Nikomakhos) de Gerasa, matemático de Grecia Antigua, que vivía a fines del siglo 1 a. d. J. C. (véase *Struik, D. J.* A concise history of mathematics. Vol. 1–2. New. York. Dover publications, cop. 1948; London, Bell, 1954; *Van der Waerden, B. L.* Science awakening. English transl. By Arnold Dresden. With additions of the author. Groningen, Noordhoff, (1961); *Zeuthen, H. G.* Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen von H. G. Zeuthen. Kopenhagen, Höst, 1896.) Entre tanto, según datos indirectos, los números poligonales eran conocidos mucho antes, en el siglo II a. d. J. C. (véase *Van der Waerden, B. L.*, obra citada, y más antes aún, en el siglo V a. d. J. C. por el famoso matemático Pitágoras y sus discípulos – pitagóricos (véase Van der Waerden, B. L., obra citada, Zeuthen (Hieronymus), obra citada, Struik, D. J., obra citada.

Con estas relaciones se dan por completo los números T_n^k; empleando las igualdades (4.1) — (4.3) se puede construir cualquier cantidad de líneas del triángulo de Pascal.

Se puede dar definición complementaria a la expresión T_n^k de manera natural para que ella tenga sentido con todo n entero no negativo y todo k entero. Con este fin, supongamos que $T_n^k = 0$, si $n \geqslant 0$, y k es tal que para él no está cumplida aunque sea una de las dos desigualdades: $0 \leqslant k$ y $k \leqslant n$. Por lo tanto, $T_n^k = 0$ para todos los pares (n, k) en los cuales $n \geqslant 0$, $k < 0$ y todos los pares (n, k) en los cuales $n \geqslant 0$, $k > n$. Ahora la relación $T_n^k = T_n^{k-1} + T_n^k$ se cumplirá para todos k [no sólo para k de 1 hasta n como en (4.3)] y los números T_n^k se darán por completo con las siguientes igualdades:

$$T_0^0 = 1, \tag{4.4}$$

$$T_0^k = 0 \text{ para } k \neq 0, \tag{4.5}$$

$$T_{n+1}^k = T_n^{k-1} + T_0^k \text{ para todos } n \geqslant 0 \text{ y todos } k. \tag{4.6}$$

Lo dicho permite presentar el siguiente cuadro demostrativo de surgimiento del triángulo de Pascal. Consideremos la tabla infinita compuesta por ceros dispuestos al tresbolillo, como se señala a continuación

.... 0 0 0 0 ....
.... 0 0 0 0 0 ....
.... 0 0 0 0 ....
.... 0 0 0 0 0 ....
....

Por supuesto, para la tabla de esta índole se cumplirá la *ley de Pascal* que consiste en que cada número es la suma de dos números próximos a la línea anterior [1]. Supongamos ahora que en la línea inicial de esta tabla uno de los ceros se ha sustituido por la unidad. Si exigimos que se cumpla la ley de Pascal, entonces la "perturbación" se extenderá en forma

[1] Supongamos que la linea infinita

$$\ldots, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_2, \ldots$$

ha sido obtenida también de la infinita

$$\ldots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_2, \ldots$$

según la ley de Pascal, ya que $s_k = d_{k-1} + d_k$ con todo k. De ahí se obtendrá la definición de la ley de Pascal para las líneas finitas si cada una de éstas

$$x_0, x_1, \ldots, x_n$$

se identifica con la infinita

$$\ldots, 0, 0, x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots$$

de "ángulo" como si se tratara de las ondas formadas por el palo encorvado puesto en un arroyo, o sea, en forma del triángulo de Pascal:

.... 0 0 1 0 0 ....
.... 0 0 1 1 0 0 ....
.... 0 1 2 1 0 ....
.... 0 1 3 3 1 0 ....

....

Dados los valores arbitrarios n y k ($n = 0, 1, 2, ...; k = 0, 1, ..., n$), se puede hallar T_n^k si se dispone de tiempo y paciencia suficientes. Con este fin conviene empezar a construir el triángulo de Pascal continuando la operación hasta que se consiga el k-ésimo número de la n-ésima línea. O sencillamente, se puede utilizar las relaciones (4.1) – (4.3) que permiten definir T_n^k después de ejercer el número finito de adiciones.

Ejercicio (que se deja a cargo del lector). ¿Cuántas adiciones se efectuarán para calcular T_n^k utilizando las relaciones (4.1) – (4.3)? (Trátese de disminuir el número de estas adiciones recurriendo a la simetría del triángulo de Pascal).

Llamemos *operación de Pascal* a la que consiste en hallar el número T_n^k con números n y k.

La operación de Pascal queda definida para todos n y k para los cuales $n \geqslant 0$; $0 \leqslant k \leqslant n$[1].

Si se sigue definiendo T_n^k como se señaló más arriba en la pág. 23, la operación de Pascal se definirá para todo n entero no negativo y para todo k entero.

Mediante la operación de Pascal se escriben fácilmente los números H_n^k que sirven de solución para el problema de la olimpíada planteado en el § 1. A fin de hallar tal representación supongamos (para $m = 0, 1, ..., 1000$; $q = 0, 1, ..., m$)

$$Z_m^q = \frac{1}{2^{1000-m}} H_m^q, \tag{4.7}$$ [2]

---

[1] Mientras tanto, el mismo Pascal (partiendo de la propuesta disposición de la tabla sobre el plano, véase la pág. 17) considerada en su tratado otra operación, a saber, la de hallar por los números x e y el número que se disponga en la intersección de la x-ésima fila vertical y de la y-ésima fila horizontal (numerándose las filas a partir de la primera, ya que esta operación queda definida con $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$). Si se denota el número que se desea hallar por $P(x, y)$, entonces es fácil enterarse de que $P(x, y) = T_{x-1+y-1}^{x-1}$, de donde $T_n^k = P(k+1, n-k+1)$.

[2] Puesto que el número dos elevado a la potencia cero se considera igual a 1, con $m = 1000$ la igualdad (4.7) adquiere la forma $Z_{1000}^q = H_{1000}^q$.

de manera que

$$H_m^q = 2^{1000-m} Z_m^q. \tag{4.8}$$

Entonces de las relaciones (4.7) y (1.1) resulta

$$Z_0^0 = \frac{1}{2^{1000}} \cdot 2^{1000} = 1. \tag{4.9}$$

Pongamos en las relaciones (1.2), (1.4) y (1.3) en lugar de los números H_m^q sue expresiones por Z_m^q conforme a (4.8). De (1.2) se obtendrá

$$2^{1000-(n+1)} Z_{n+1}^0 = \frac{2^{1000-n} Z_n^0}{2},$$

de donde

$$Z_{n+1}^0 = Z_n^0. \tag{4.10}$$

Igualmente de (1.4) tenemos

$$2^{1000-(n+1)} Z_{n+1}^{n+1} = \frac{2^{1000-n} Z_n^n}{2} n,$$

de donde

$$Z_{n+1}^{n+1} = Z_n^n. \tag{4.11}$$

Por fin, de (1.3) resulta

$$2^{10000-(n+1)} Z_{n+1}^k = \frac{2^{1000-n} \cdot Z_n^{k-1} + 2^{1000-n} Z_n^k}{2},$$

de donde

$$Z_{n+1}^k = Z_n^{k-1} + Z_n^k. \tag{4.12}$$

Las igualdades (4.10) — (4.12) indican que cada línea

$$\omega_{n+1} = \langle Z_{n+1}^0, \ldots, Z_{n+1}^{n+1} \rangle,$$

donde $n = 0, 1, \ldots, 999$ *se* obtiene de la anterior

$$\omega_n = \langle Z_n^0, \ldots, Z_n^n \rangle,$$

según la ley de Pascal. Puesto que, como se ve de la igualdad (4.9), la línea inicial

$$\omega_0 = \langle Z_0^0 \rangle$$

es la línea cero de Pascal, entonces la que sigue, ω_1, es la primera línea de Pascal, la ω_2, su segunda línea, etc.; para cada m de 0

hasta 1000[1] la línea ω_m es la m-ésima línea de Pascal y

$$Z_m^q = T_m^q. \qquad (4.13)$$

Por consiguiente, en virtud de (4.8), siendo cada $m = 0, 1, \ldots 1000$ y cada $k = 0, 1, \ldots, m$

$$H_m^q = 2^{1000-m} T_m^q. \qquad (4.14)$$

En particular,

$$H_{1000}^q = T_{1000}^q. \qquad (4.15)$$

De ahí se desprende que la cantidad de hombres que llegaron a los cruces de la milésima fila no es otra cosa que los miembros de la milésima línea de Pascal. Si la operación de Pascal se tiene por "universalmente admitida", la igualdad (4.15) ofrecerá la solución para el problema del § 1 (en la tercera interpretación indicada al final del § 2). En los siguientes dos párrafos veremos cómo se logra hallar las soluciones de dos problemas importantes por medio de la operación de Pascal.

§ 5.
COEFICIENTES BINOMIALES

En este párrafo señalaremos cómo se puede expresar los así llamados *coeficientes binomiales* por medio de la operación de Pascal. Los últimos se definen como sigue.

Tomemos el binomio $1 + x$ y empecemos a elevarlo a las potencias 0, 1, 2, 3, etc., disponiendo los polinomios que se obtengan según los exponentes crecientes de la letra x. Tenemos

$$(1 + x)^0 = 1, \qquad (5.1)$$

$$(1 + x)^1 = 1 + x, \qquad (5.2)$$

$$(1 + x)^2 = (1 + x)(1 + x) = 1 + 2x + x^2, \qquad (5.3)$$

$$(1 + x)^3 = (1 + x)^2(1 + x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3, \qquad (5.4)$$

etc.

En general, para cualquier número n entero no negativo

$$(1 + x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p, \qquad (5.5)$$

[1] Cuando $m > 1000$, la línea ω_m no está definida.

donde $a_0, a_1, ..., a_p$ son ciertos números. Si se quiere, no costaría mucho trabajo para cerciorarse de que $p = n$ y $a_0 = a_p = 1$. Sin embargo, no es eso lo que se necesita ahora. Esto se conseguirá como consecuencia de una fórmula más común. En esta etapa basta saber, que el resultado de elevación del binomio $(1 + x)$ a la potencia n (donde n es un número entero no negativo) puede ser escrito en forma de un polinomio con coeficientes numéricos, ordenado según los exponentes crecientes de la letra x como se señala en la relación (5.5). El polinomio que figura en el segundo miembro de esta relación, se denomina *desarrollo del binomio para el exponente n*. Sus coeficientes (su número es p) dependen, naturalmente, de n. Para subrayar esta dependencia, se utilizan frecuentemente unas designaciones especiales para estos coeficientes de los cuales forma parte n. Precisamente, el coeficiente de x^k en el desarrollo del binomio para el exponente n se designa por $\binom{n}{k}$. Tales números se llaman *coeficientes binomiales*.

La relación (5.5) puede ser escrita ahora en forma de

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{p}x^p \qquad (5.6)$$

y de las relaciones (5.1) – (5.4) se deduce

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1.$$

Se ve que para los exponentes $n = 0, 1, 2, 3$ las líneas de los coeficientes binomiales coinciden respectivamente con las 0, 1, 2, 3 del triángulo de Pascal. Nos vamos a cerciorar de que esto es cierto para todo n. Con este fin, veremos cómo se obtiene la línea de coeficientes para el exponente $n + 1$ de la de coeficientes para el n. Utilicemos la fórmula

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x). \qquad (5.7)$$

Escribamos para los miembros primero y segundo de esta fórmula los desarrollos según los exponentes crecientes de la letra x. Sustituyendo n por $n + 1$, la fórmula (5.6) ofrecerá para el primer miembro:

$$(1 + x)^{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}x + \ldots + \binom{n+1}{k}x^k + \ldots + \binom{n+1}{q}x^q, \quad (5.8)$$

donde q es cierto número. Para el segundo, debido a la misma fórmula (5.6), se obtendrá:

$$(1+x)^n(1+x) = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \ldots + \binom{n}{p}x^p\right]\cdot(1+x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \ldots$$
$$+ \binom{n}{k}x^k + \ldots + \binom{n}{p}x^p + \binom{n}{0}x + \ldots + \binom{n}{k-1}x^k + \ldots + \binom{n}{p-1}x^p +$$
$$+ \binom{n}{p}x^{p+1} = \binom{n}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]x + \ldots + \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]x^k + \ldots +$$
$$+ \left[\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}\right]x^p + \binom{n}{p}x^{p+1}. \quad (5.9)$$

En virtud de (5.7) los miembros segundos de las relaciones (5.8) y (5.9) son equivalentes. Por eso $q = p + 1$; igualando los coeficientes de la letra x con iguales exponentes, se deduce

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} \quad (5.10)$$
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad (5.11)$$
$$\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{p}. \quad (5.12)$$

Las relaciones (5.10) — (5.12) muestran que la línea de coeficientes de desarrollo para el exponente $n+1$ se obtiene de la de coeficientes de desarrollo para el exponente n según la ley de Pascal. Puesto que la línea de coeficientes de desarrollo para el exponente 0 coincide con la línea cero de Pascal, todas las líneas sucesivas de coeficientes coincidirán también con las líneas respectivas del triángulo de Pascal. Por eso los números $\binom{n}{k}$ están definidos tan sólo con $k = 0, 1, \ldots, n$; con la particularidad de que

$$\binom{n}{k} = T_n^k. \quad (5.13)$$

Observación. A la pregunta "¿con qué coeficientes integran x^{-3} y x^{20} en el desarrollo del binomio para el exponente 5?" se podría responder: "con coeficientes equivalentes a cero". Es natural que se siga definiendo la expresión $\binom{n}{k}$, para los casos $k < 0$ y $k > n$, suponiendo que $\binom{n}{k} = 0$. Entonces, la igualdad (5.13) en virtud de la definición complementaria hecha en el párrafo anterior para el símbolo T_n^k será válida para todos n no negativos y todos k enteros.

Por lo tanto, han sido expresados los coeficientes binomiales por medio de la operación de Pascal. Se podría escribir ahora la relación (5.6) en la siguiente forma:

$$(1+x)^n = T_n^0 + T_n^1 x + T_n^2 x^2 + \ldots + T_n^k x^k + \ldots + T_n^n x^n. \quad (5.14)$$

A veces la fórmula (5.14) se denomina *fórmula del binomio de*

Newton o, sencillamente, *binomio de Newton*[1]. Otra forma, más tradicional, de esta fórmula se ofrecerá en el § 7.

Puede admitirse que en el presente párrafo hemos considerado el siguiente "problema sobre los coeficientes binomiales": hallar la expresión para $\binom{n}{k}$. Como conocemos del § 2 se puede comprender de distinta manera lo que es la solución para el problema de este tipo. Si, por ejemplo, se tiene por solución la expresión que permite pasar de n y k al coeficiente binomial correspondiente (en representación decimal), entonces $\binom{n}{k}$ será de por sí la solución. Exijamos que la solución exprese $\binom{n}{k}$ por medio de los números n, k y las operaciones "universalmente admitidas"; tal interpretación de la solución dependrá de la elección de las últimas. Si la operación de Pascal se considera como "universalmente admitida", la fórmula (5.13) ofrecerá la solución para el problema sobre los coeficientes binomiales. Otra solución de este problema, recurriendo a otras operaciones "universalmente admitidas", se ofrecerá en el § 7.

§ 6.
NÚMERO DE PARTES DE UN CONJUNTO DADO

En las matemáticas se llama *conjunto* a toda colección de objetos. Por ejemplo:

a) la de todas las páginas del presente folleto;
b) la de todos los números enteros;
c) la de todos los números pares;
d) la de todos los lápices puestos en una cajetilla dada.

Todas esas colecciones serán conjuntos.

Si están señalados un objeto y cierto conjunto, pueden haber dos casos:

1) el objeto pertenece al conjunto que se considera;
2) el objeto no pertenece al conjunto que se considera.

[1] La fórmula (5.14) era conocida mucho antes de Newton, en particular, por Tartaglia de quien se ha dicho ya. El nombre de Newton se vincula con la fórmula en cuestión exclusivamente porque era quien indicó en 1676 el procedimiento de su generalización para el caso de exponente racional arbitrario (incluso el negativo).

En el primer caso él objeto se llama *elemento* del conjunto a considerar. Por ejemplo, el número 3 es el elemento del conjunto de todos los números enteros sin que lo sea para el conjunto de todos los números pares.

Puede suceder que todos los elementos de cierto conjunto A sean simultáneamente los elementos de un otro conjunto B (por ejemplo, todos los elementos del conjunto de todos los números pares son los elementos del conjunto de todos los números enteros). En este caso, el conjunto A se llama *parte* o *subconjunto* del conjunto B. Es evidente que cada conjunto es parte de sí mismo. Si el conjunto A es una parte del conjunto B y el último es la del conjunto A, esto quiere decir que A y B se componen por los mismos elementos, es decir, coinciden (constituyen "el mismo conjunto").

Los conjuntos pueden ser *finitos* [los de los ejemplos citados más arriba, en los puntos a) y d) e *infinitos* [los de los ejemplos señalados en los puntos b) y c)]. Los conjuntos finitos (sólo éstos serán considerados en este párrafo) constituyen el objeto de estudio de una disciplina matemática especial que se llama *teoría combinatoria*.

Entre los conjuntos finitos se distingue uno especial, a saber, un conjunto que no contiene ningunos elementos; tal conjunto se llama *vacío*. Por lo tanto, no se excluye la posibilidad de que al abrir la cajetilla, se revele que el conjunto de lápices que ésta contiene, esté vacío. He ahí lo que escribe sobre el conjunto vacío Alexándrov P. S. [1]:

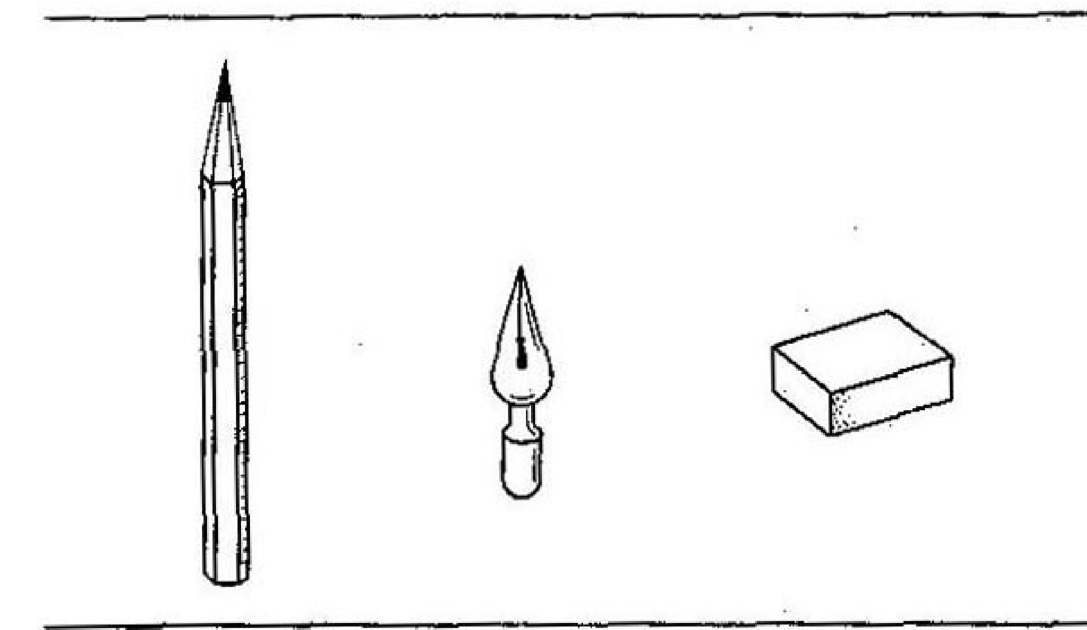
Al género de conjuntos finitos se refiere también el conjunto vacío, es decir, el conjunto que no contiene ningún elemento; el número de elementos del conjunto vacío es cero. La conveniencia de considerar el conjunto vacío se debe a que cuando se define, de la forma que sea, el conjunto, es posible que no se sepa de antemano si és te contiene por lo menos un elemento. Por ejemplo, es probable que el conjunto de avestruces que en actualidad se hallan tras el círculo polar, esté vacío; sin embargo, no se lo puede afirmar acertadamente, ya que puede ser que algún capitán haya llevado allá un avestruz". El conjunto vacío se tiene por parte de todo conjunto.

---

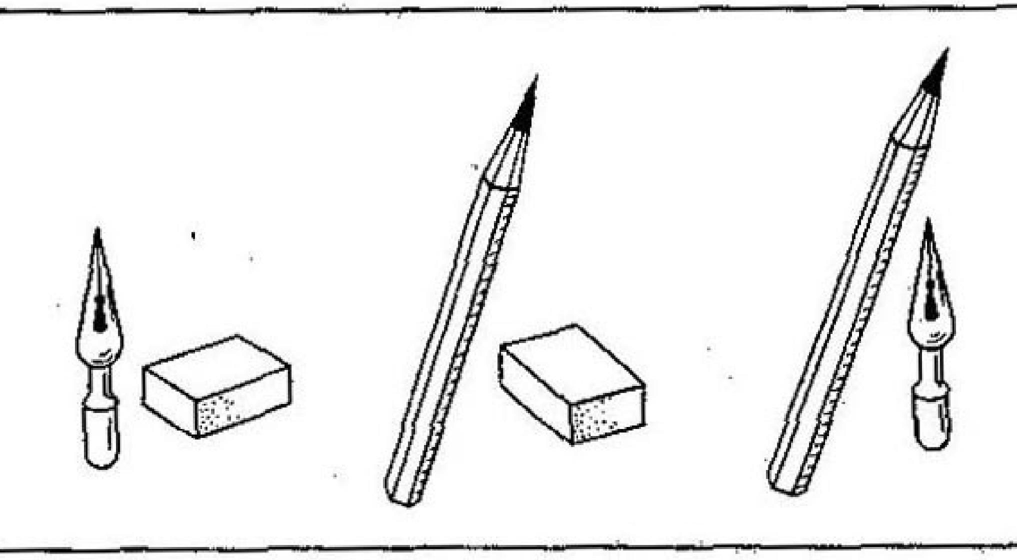
[1] *Александров П. С.* Введение в общую теорию множеств и функций, М.–Л., Гостехиздат, 1948, стр. 14. (*Alexándrov P. S.*, Introducción a la teoría general de conjuntos y funciones. Moscú-Leningrad, Costejizqat, 1948, pág. 14, en ruso.)

Si el conjunto es finito, sus elementos pueden contarse hallando, por lo tanto, el número de los elementos del conjunto. El conjunto compuesto por n elementos se llama "el de n elementos". El conjunto de páginas de este folleto es, por ejemplo, el de 39 elementos, el conjunto vacío es el de 0 elementos.

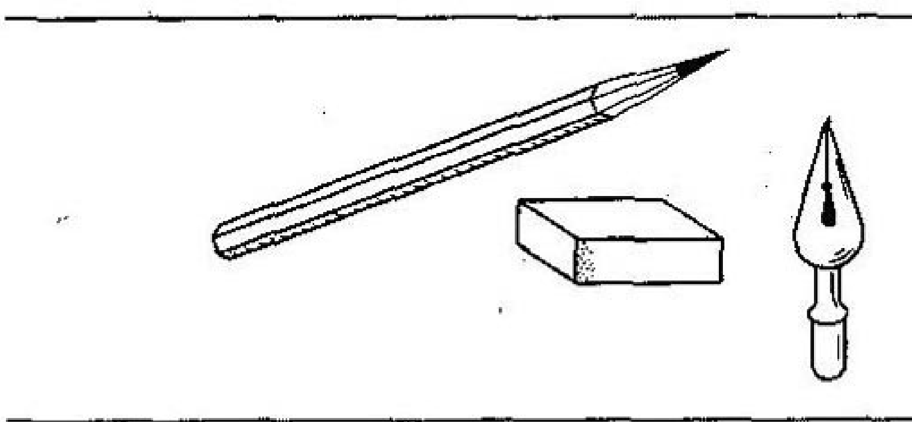
Ejemplo. Consideraremos un conjunto compuesto por tres objetos: lápiz, pluma y goma de borrar. Hallemos todas sus partes. Se tiene exactamente una parte de cero elementos, o sea, un conjunto vacío. Hay exactamente tres partes de un elemento:



Hay exactamente tres partes de dos elementos:



Por fin, hay exactamente una parte de tres elementos (que coincide con todo el conjunto):



Por consiguiente, en total, este conjunto tiene ocho partes.

Que esté dado un conjunto compuesto por n elementos. Toda su parte de k elementos se llama *combinación de n elementos dados por k*. (Son las mismas combinaciones que se exponen en el curso escolar de álgebra, en el apartado "Ordenación"). Es evidente que el número de combinaciones de n elementos dados por k no depende de cuáles son los n elementos que se han dado, sino solamente de los números n y k, *motivo por el cual este número* se llama brevemente como *número de combinaciones de n elementos por k* y se designa mediante

$$C_n^k.$$

En otras palabras, C_n^k es el número de partes de k elementos del conjunto de n elementos. Suele considerarse que la expresión C_n^k tiene sentido cuando $n = 0, 1, 2, \ldots, 0 \leqslant k \leqslant n$[1].

El número de todas las partes del conjunto de n elementos se denotará por C_n, así que

$$C_n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n. \qquad (6.1)$$

¿A qué son equivalentes, pues, los números C_n, C_n^k? A algunas de estas preguntas se les podría dar una respuesta inmediata. Del ejemplo recién examinado se desprende que $C_3 = 8$, $C_3^0 = C_3^3 = 1$, $C_3^1 = C_3^2 = 3$.

[1] Mientras tanto, es natural creer que la expresión C_n^k tiene sentido también con $k > n$ y es equivalente en este caso a cero (ya que aquí no hay del todo partes de k elementos).

Luego tiene lugar lo siguiente.

Primera propiedad del número de combinaciones:

$$C_m^0 = C_m^m = 1. \qquad (6.2)$$

Demonstración. Efectivamente, el conjunto de m elementos tiene exactamente una parte de 0 elementos (conjunto vacío) y exactamente una parte de m elementos (el propio conjunto E).

Establezcamos ahora, sin calcular los propios números C_m^k, otras dos propiedades de estos números. El establecimiento de la segunda propiedad será un ejercicio útil para la asimilación de las nociones expuestas en este párrafo; en lo que se refiere a la tercera propiedad, es precisamente ella que junto con la primera constituirá la base para los cálculos de los números C_n^k.

Segunda propiedad del número de combinaciones:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (6.3)$$

Demonstración. Consideremos cierto conjunto M compuesto por n elementos. Debe demostrarse que el número de sus partes de k elementos es equivalente al de sus partes de $(n-k)$ elementos. Imaginemos la siguiente construcción. Cortemos de papel tantos cuadrados cuantas partes de k elementos haya en este conjunto (es decir, C_n^k) representando por cada uno de ellos una de estas partes de modo que cada parte de k elementos esté representada en uno de los cuadrados. A continuación, cortemos de papel C_n^{n-k} círculos y expresemos cada una de las partes de $(n-k)$ elementos exactamente por uno de estos círculos. Nos basta ahora revelar que hay igual cantidad de círculos y cuadrados. Con este propósito coloquemos todos los cuadrados sobre la mesa poniendo sobre cada cuadrado un círculo conforme a la siguiente regla: si por medio del cuadrado está representada cierta parte del conjunto M compuesta por k elementos, se ha de colocar sobre este cuadrado el círculo que represente la parte del conjunto M compuesta por los *demás* $n-k$ elementos, es decir, por todos aquellos elementos del conjunto M que no hayan integrado la parte representada en el cuadrado (la fig. 8 ofrece varios cuadrados junto con compuesto por cinco elementos a, b, c, d, e). Es evidente que sobre cada cuadrado se pondrá exactamente un círculo y cada círculo se colocará exactamente sobre un cuadrado. Esto significa que el número de círculos es equivalente al de cuadrados.

Antes de pasar a la tercera propiedad demostremos el siguiente lema.

LEMA. *Escojamos en el conjunto de* $(n + 1)$ *elementos cierto elemento. El número de las partes de* k *elementos de este conjunto que contienen este elemento escogido, es equivalente a* C_n^{k-1}.

Demonstración. Volvamos a efectuar el experimento mental con círculos y cuadrados. Cortemos de papel tantos cuadrados cuanto

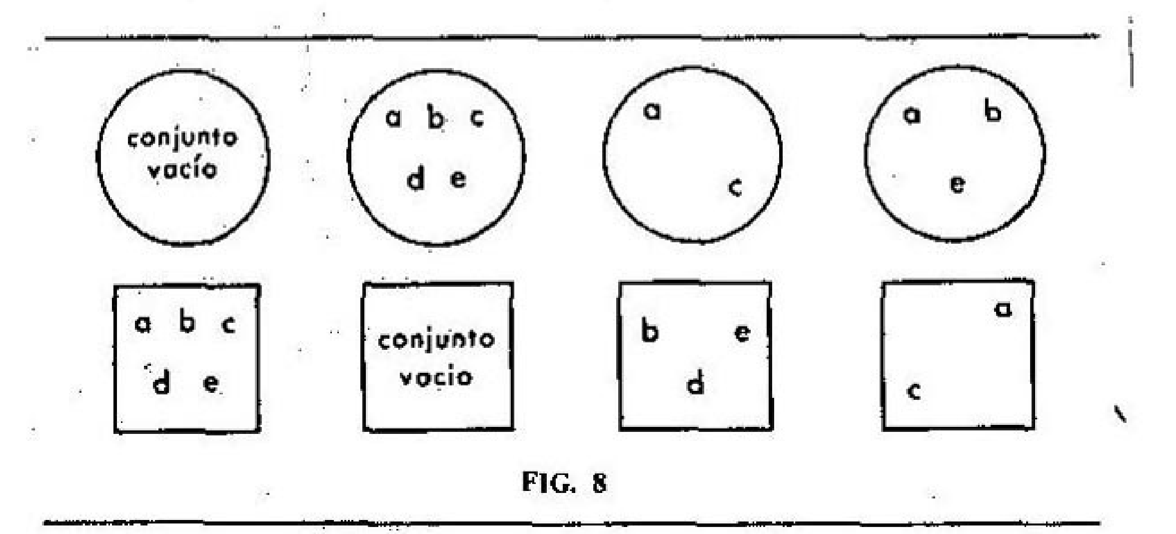


FIG. 8

haya partes de k elementos, que contengan el elemento escogido, y representemos en cada uno de ellos una parte tal que estén expresadas todas las partes. Cortemos de papel C_n^{k-1} círculos y representemos en cada círculo una de las partes de $(k - 1)$ elementos del conjunto de todos los elementos no separados de modo que todas tales partes estén representadas (hay n elementos no escogidos, motivo por el cual hay exactamente C_n^{k-1} tales partes). Pongamos sobre cada cuadrado un círculo conforme a la siguiente regla: si el cuadrado representa cierto conjunto A, ha de colocarse sobre él un círculo que tenga representado el conjunto obtenido de A eliminando el elemento escogido. Es evidente que sobre cada cuadrado se pondrá exactamente un círculo y cada círculo se colocará exactamente sobre un cuadrado. Esto significa que el número de cuadrados es equivalente al de círculos, es decir, C_n^{k-1}. Pero, han sido cortados exactamente tantos cuadrados, cuantas partes de k elementos del conjunto de $(n + 1)$ elementos contienen el elemento escogido. Por lo tanto, el número de tales partes es equivalente a C_n^{k-1}, lo que queda demostrado.

Pasemos ahora a la tercera propiedad del número C_n^k.

Tercera propiedad del número de combinaciones:

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k. \qquad (6.4)$$

Demonstración. Tomemos el conjunto arbitrario M de $(n+1)$ elementos y compongamos todas sus partes de k elementos. Escojamos en M cierto elemento denotándolo con la letra minúscula a. Designemos por la letra mayúscula X el número de aquellas partes de k elementos del conjunto M que contengan el elemento a y por la Y el de aquellas partes de k elementos del conjunto M que no contengan a. Entonces

$$C_{n+1}^{k} = X + Y. \tag{6.5}$$

Pero, según el lema, $X = C_n^{k-1}$. En lo que atañe a Y, esto es el número de combinaciones por k de n elementos no escogidos, es decir, C_n^k. Por eso,

$$C_{n+1}^{k} = C_n^{k-1} + C_n^k, \tag{6.6}$$

lo que queda demostrado.

La tercera propiedad igual como la primera señala que la línea

$$C_{n+1}^{0},\ C_{n+1}^{1},\ \ldots,\ C_{n+1}^{n+1} \tag{6.7}$$

se obtiene de la

$$C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots,\ C_n^n \tag{6.8}$$

de acuerdo con la ley de Pascal. Puesto que con $n=0$ la línea

$$C_0^0 \tag{6.9}$$

coincide, en virtud de (6.2), con la línea cero de Pascal, también para n arbitrario la línea (6.8) coincidirá con la n-ésima línea de Pascal, y por eso,

$$C_n^k = T_n^k. \tag{6.10}$$

Por consiguiente, ya sabemos calcular el número de las partes de k elementos del conjunto de n elementos: por lo tanto, el número de combinaciones de n elementos por k (la fórmula (6.10) da la solución del "Problema sobre el número de combinaciones" a condición de que la operación de Pascal se tenga por "universalmente admitida" [1]).

En lo que se refiere al número de todas las partes del conjunto de n elementos, las relaciones (6.1) y (6.10) señalan que este número es equivalente a la suma de los términos de la n-ésima línea de Pascal, la cual, como se sabe, es equivalente a 2^n. Definitivamente,

$$C_n = 2^n. \tag{6.11}$$

[1] El lector hallará en el § 7 otra resolución, con empleo de otras operaciones "universalmente admitidas".

§ 7.
VÍNCULO CON FACTORIALES

En el § 4 se dan dos procedimientos para calcular el número T_n^k con n y k prefijados: el procedimiento más "mecánico" (pero, que lleva a cálculos adicionales) de construción gradual del triángulo de Pascal y el más "económico" por la cantidad de operaciones (pero, que exige una organización determinada de cálculos) que consiste en utilizar las relaciones (4.1) – (4.3). Ambos procedimientos son muy semejantes y, en lo fundamental, se deducen directamente de los números dados T_n^k por medio de la ley de Pascal. Sin embargo, existe también otro procedimiento para hallar T_n^k que se señala a continuación.

Introduzcamos al principio una designación. Supongamos que

$$0! = 0,$$

y para todo m entero

$$m! = (m-1)!\,m.$$

Por consiguiente, cuando $m > 0$,

$$m! = 1 \cdot 2 \ldots m.$$

La expresión $m!$ se lee así: "factorial del número m" o en forma más breve: "m factorial".

Expresemos ahora la operación de Pascal por la de cálculo de la factorial y las operaciones aritméticas. Con este propósito se considerará la siguiente expresión:

$$\frac{m!}{q!(m-q)!}.$$

Designemos esta expresión por F_m^q. Es evidente que la expresión F_m^q tiene sentido con $m \geqslant 0$, $0 \leqslant q \leqslant m$. Anotemos que

$$F_0^0 = \frac{0!}{0!0!} = 1.$$

Luego,

$$F_m^0 = \frac{m!}{0!m!} = 1, \quad F_m^m = \frac{m!}{m!0!} = 1.$$

Por fin,

$$F_n^{k-1} + F_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!}{(k-1)!k(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \times$$

$$\times \frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = F_{n+1}^k.$$

Así pues, la línea

$$F_0^0$$

es la línea cero de Pascal, y la "$(n+1)$"-ésima línea

$$F_{n+1}^0,\ F_{n+1}^1,\ \ldots,\ F_{n+1}^{n+1}$$

se obtiene de la "n"-ésima

$$F_n^0,\ F_n^1,\ \ldots,\ F_n^n$$

según la ley de Pascal. Por eso con todo $m = 0, 1, 2, \ldots$ la línea

$$F_m^0,\ F_m^1,\ \ldots,\ F_m^m$$

coincide con la m-ésima línea de Pascal y

$$F_m^q = T_m^q.$$

De ahí

$$T_m^q = \frac{m!}{q!(m-q)!}.$$

Por consiguiente, hemos expresado la operación de Pascal por las operaciones de cálculo de la factorial, la sustracción, multiplicación y división en el sentido de que hemos encontrado para T_m^q la expresión que contiene, además de m y q, sólo los signos de las operaciones señaladas. Esto otorga la posibilidad de calcular T_m^q, ya que sabemos calcular las factoriales, las diferencias, los productos y cocientes.

De la fórmula recién hallada para T_m^q se puede sacar una serie de consecuencias.

Consecuencia 1. Simplificando en la expresión hallada para T_m^q el numerador y denominador en $(m-q)!$ resulta

$$T_m^q = \frac{m(m-1)\dots[m-(q-1)]}{1\cdot 2\dots q}.$$

Consecuencia 2. Que sea $m \geqslant 1$, $1 \geqslant q$. El producto de q factores $m(m-1)\dots[m-(q-1)]$ se divide siempre por el producto de q multiplicadores $1\cdot 2 \dots q$.

Efectivamente, en virtud de la consecuencia 1, la relación de estos productos es equivalente a T_m^q, y T_m^q es un número entero.

Consecuencia 3. De la relación (4.15) se deduce

$$H_{1000}^q = \frac{1000!}{q!(1000-q)!}.$$

Esta es la nueva forma para la resolución del problema del § 1.

Consecuencia 4. De la relación (5.13) se obtiene

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\dots k}.$$

Esta es la expresión "escolar" tradicional para el coeficiente binomial.

Consecuencia 5. De la relación (5.14) y la consecuencia 1 se deduce que

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{1\cdot 2} + \dots + \\ + \frac{n(n-1)\dots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\dots k}x^k + \dots + x^n.$$

Esta es la forma "escolar" tradicional de la fórmula del binomio de Newton.

Consecuencia 6. La relación (6.10) ofrece la fórmula "escolar" tradicional para el número de combinaciones

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\dots k}$$

